

Concours d'entrée en 1<sup>ère</sup> année de l'ENSA de Marrakech  
Epreuve de mathématiques (durée 1h30mn)

Attention !!!!!

Les calculatrices sont interdites.

Réponse juste = 1 pt    Réponse fausse = -1 pt    pas de réponse = 0 pt.

---

Exercice 1.

Soient  $u, v$  et  $w$  dans  $\mathbb{N}$ .

- a)  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad u \wedge v = u \wedge (v + nu)$
  - b) si  $u \wedge v = 1$  et  $w$  divise  $u$  alors  $w \wedge v = 1$
  - c) si  $w \wedge u = 1$  alors  $u \wedge v = u \wedge (v, w)$
  - d) si  $p$  est premier et ne divise pas  $u$  alors  $p$  et  $u$  sont premier entre eux.
- 

Exercice 2.

Soient  $Z$  et  $Z'$  deux nombres complexes non nuls.

a)

$$\frac{1}{Z} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$$

b)

$$|\operatorname{Re}(Z)| \leq |Z|$$

c)

$$||Z| - |Z'|| \leq |Z + Z'|$$

d)

$$\operatorname{Re}(Z\bar{Z}') = |Z| |Z'|.$$

---

Exercice 3.

Soient  $Z$  et  $Z'$  deux nombres complexes.

- a)  $\operatorname{Arg}(ZZ') = \operatorname{Arg}(Z) + \operatorname{Arg}(Z')$

- b)  $\text{Arg}(Z) = -\text{Arg}(\overline{Z}) = \text{Arg}\left(\frac{1}{Z}\right)$
  - c)  $\text{Arg}(Z+Z') = \text{Arg}(Z) + \text{Arg}(Z')$
  - d)  $\text{Arg}\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \text{Arg}(Z) - \text{Arg}(Z')$ .
- 

Exercice 4.

Soit la suite  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

- a) la suite  $u_n$  est croissante
  - b) la suite  $u_n$  est convergente
  - c) la suite  $u_n$  est majorée
  - d) la suite  $u_n$  est positive.
- 

Exercice 5.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  et tout  $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .

a)

$$(\sqrt[n]{x})^n = x$$

b)

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

c)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m+n]{x}$$

d)

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} = \sqrt[mn]{x^{m+n}}.$$


---

Exercice 6.

Soient E et F deux ensembles finis avec  $\text{Card}(E) = m$  et  $\text{Card}(F) = n$ .

- a)  $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$
  - b)  $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \cdot \text{Card}(F)$
  - c)  $\text{Card}(E \cap F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cup F)$
  - d)  $\text{Card}(P(E)) = 2^m$ , avec  $P(E)$  est l'ensemble des parties de E.
- 

Exercice 7.

Soient A et B deux parties d'un ensemble X. On note par  $P(A)$  la probabilité d'un événement A avec  $P(A) \neq 0$ .

- a)  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- b)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - c)  $P(A/B)P(A) = P(A \cap B) \cdot P(B)$
  - d)  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ .
- 

Exercice 8.

Soit pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^*$  la fonction

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

- a) La limite en 0 est 0
  - b) La limite en 0 est 1
  - c) La limite en 0 n'existe pas
  - d) La fonction  $f(x)$  est dérivable en 0.
- 

Exercice 9.

Soit la fonction définie sur  $D = ]0, +\infty[$ , par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- b)  $y = x + 1$  est une asymptote oblique
- c) la fonction  $F(x)$  définie sur  $D$  par

$$F(x) = \frac{x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3}$$

est une primitive de  $f$  sur  $D$

- d)  $f$  est décroissante pour  $x \geq 1$ .
- 

Exercice 10.

Soient deux fonctions

$$C(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{et} \quad S(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

- a)  $C^2(x) - S^2(x) = 1$
- b) les deux fonctions sont positives
- c)  $C' = S$  et  $S' = C$
- d) les deux fonctions sont décroissantes.

---

Exercice 11.

Soit la fonction  $f$  définie sur  $D_f$  par

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 4}$$

- a)  $D_f = ]-\infty, -2] \cup ]2, +\infty[$
  - b)  $f$  est dérivable sur  $]-\infty, -2] \cup ]2, +\infty[$
  - c)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$
  - d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
- 

Exercice 12.

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{\pi} x \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{|x|}\right) - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et on note par  $D_f$  le domaine de définition de  $f$ .

- a)  $D_f = [0, 1]$
  - b)  $f$  est continue en 0
  - c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
  - d)  $y = -2x + \frac{2}{\pi}$  est l'asymptote au graphe de  $f$  quand  $x$  se rapproche de  $+\infty$ .
- 

Exercice 13.

a)

$$\int_0^1 \frac{2x + 2}{(x + 1)^2} dx = 3 \ln 2$$

b)

$$\int_1^{-1} e^{-x} dx = e^1 - e^{-1}$$

c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}$$

d)

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \ln\left(\frac{1 + e}{3}\right).$$

---

Exercice 14.

Dans le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère les plans (P) et (Q) d'équations

(P) :  $2x+y-13=0$

(Q) :  $x-7y+16=0$

et la droite (D) d'équation paramétrique (D) : 
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

et la sphère (S) d'équation (S) :  $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 25$ .

a) l'intersection de (P) et (Q) est la droite (D)

b) l'intersection de (P) et (S) est un cercle

c) la droite (D) est tangente à (S)

d) la droite (D) n'est pas tangente à (S).

---

Exercice 15.

Dans le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère la sphère d'équation :

$$x^2+y^2+z^2+x-\frac{1}{4} = 0$$

et le plan (P) d'équation  $y+z-1=0$ .

a) le centre de la sphère est  $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$

b) le rayon de la sphère est  $R=\frac{1}{2}$

c) le plan (P) est tangente à la sphère (S)

d) l'intersection de (P) et (S) est un cercle.